La position de chercheur en didactique dans une étude de résolution de problème ouvert par des élèves et par un mathématicien

Gardes Marie-Line*

** S2HEP – Université Lyon 1*
La Pagode - 38 Bd Niels Bohr
69622 Villeurbanne cedex
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

RÉSUMÉ : De nombreux travaux, dont ceux de l'équipe DREAM, étudient la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques. Dans ce cadre-là, notre étude a pour objectif de mettre en perspective les processus de recherche d'un mathématicien, d'élèves et d'étudiants afin de repérer l'existence d'éléments invariants dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient favoriser l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants. En nous appuyant sur nos recherches en cours, nous montrerons comment les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien ont nourri le processus de construction d'une situation didactique mettant l'élève en position de mathématicien.

ABSTRACT: Several studies, including those of DREAM (a research team) investigate the implementation of problem-solving in math class. In this research, we propose problem solving to pupils, students and researchers and we study their process of research. The aim is to identify the existence of invariant elements in the mathematician's research and to promote mathematical research students. In this article, we show how the interaction between researcher in math education and mathematician helped build a learning situation.

MOTS-CLÉS : problème ouvert, conjecture d'Erdös-Straus, processus de recherche, théorie élémentaire des nombres, dimension expérimentale en mathématiques.

KEYWORDS: unsolved problem, the Erdös-Straus Conjecture, process of research, number theory, experimental approach in mathematics.

Introduction

Depuis plusieurs années, de nombreuses expériences, au collège et au lycée, ont été menées sur la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques (Polya 1957, Schoenfeld 1985, Arsac et al. 1988, Arsac & Mante 2007). Actuellement, ces travaux se poursuivent, notamment au sein de l'équipe

EXPRIME[3] (2006-2010) puis DREAM[4] qui pose plus particulièrement la question de la dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématiques (Aldon et al. 2010). Un des enjeux majeurs de ces recherches est de mettre l'élève dans une position de chercheur lui permettant, sous certains aspects, la reproduction de la position du mathématicien. Dans notre travail de recherche en didactique des mathématiques, nous étudions une recherche de résolution d'un même problème ouvert (au sens non résolu) en théorie élémentaire des nombres par des élèves et des étudiants d'une part et par un mathématicien d'autre part. Notre objectif est de mettre en perspective les deux processus de recherche afin de repérer l'existence d'éléments invariants dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient favoriser l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants. Dans cette étude, nous avons eu de nombreuses interactions avec le mathématicien engagé dans la recherche du problème. En nous appuyant sur nos recherches en cours, nous montrerons comment ces interactions ont nourri le processus de construction d'une situation didactique mettant l'élève dans la position de mathématicien. Dans une première partie, nous présentons le problème mathématique que nous avons retenu pour conduire cette recherche, ainsi que quelques résultats associés et dans une seconde partie, nous détaillons les différentes interactions que nous avons eues en tant que chercheur en didactique avec le mathématicien engagé dans la recherche de la conjecture.

1. Présentation du problème mathématique et de quelques résultats

Ernst Straus (1922-1983) et Paul Erdös (1913-1996), tous deux mathématiciens, s'intéressent, en 1948, à la décomposition d'une fraction *a*/*b* en une somme de fractions unitaires[5] et énoncent la conjecture (Erdös, 1950) selon laquelle :

Pour tout n au moins égal à 2, on peut trouver des entiers x, y, z (non nécessairement distincts) tels que : 4/n = 1/x + 1/y + 1/z.

Depuis 1950 et jusqu'à aujourd'hui, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à cette conjecture. Voici les trois résultats majeurs actuellement connus :

Résultat de Mordell (Mordell, 1969) : Cette équation a des solutions pour tous les nombres non congrus à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840. Ces solutions sont polynomiales en *n*. Exemple : Si $n \equiv 2[3]$ alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n-3} + \frac{1}{\frac{n-2}{3}} + \frac{1}{\frac{(n-3)(n-2)}{3}}$.

Résultat de Schinzel (Schinzel, 2000) : Pour tous les nombres congrus à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840, il n'existe pas de formule polynomiale globale en *n* donnant une solution.

3 EXpérimenter des Problèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole.

4 Démarche de Recherche et d'Expérience pour l'Apprentissage des Mathématiques. L'équipe a écrit un article dans ces présents actes.

5 Une fraction unitaire est une fraction où le numérateur est 1 et le dénominateur est un entier positif.

Résultats de Swett (Swett, 1999) : La conjecture a été vérifiée pour tous les nombres inférieurs à 10^{14}. Plus récemment, suite à notre intervention dans un séminaire en février 2009, Michel Mizony, maître de conférences à l'IREM de Lyon, s'intéresse à la résolution de cette conjecture. Les recherches qu'il a menées l'ont conduit à établir l'identité suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}, \qquad [1]$$

où m est un entier naturel non nul et d un diviseur de m^2. L'intérêt principal de cette identité est d'obtenir une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires sous la seule condition que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. Ainsi il reformule la conjecture d'Erdös-Straus sous la forme : pour tout nombre premier n, il existe un entier m et un diviseur d de m^2 tels que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. La validité de cette conjecture entraîne celle d'Erdös-Straus. Cette formulation établit de plus un lien étroit entre décompositions en somme de fractions égyptiennes[6] et une propriété des nombres premiers. Un autre intérêt de cette identité est de produire de nombreuses formules polynomiales qui lui ont permis, avec un collègue[7], en juin 2010, d'établir des algorithmes afin de vérifier la conjecture pour tous les nombres premiers inférieurs à 10^{17} (Gardes et Mizony 2011).

2. Les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien

Notre étude comporte trois approches : mathématique, épistémologique et didactique. L'approche mathématique consiste en l'étude approfondie de la conjecture d'Erdös-Straus et de quelques résultats associés. L'approche épistémologique est dans ce cas l'étude du processus de recherche d'un mathématicien. L'approche didactique a pour objectif d'élaborer une situation didactique à proposer à des élèves et à des étudiants. Les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien que nous analysons sont à l'articulation de ces trois approches. La première interaction se situe à l'articulation des approches mathématique et épistémologique et la seconde interaction se situe à l'articulation des approches épistémologique et didactique.

6 Une fraction égyptienne est synonyme d'une fraction unitaire.

7 Marc Deléglise, Maître de conférences à l'université Lyon 1.

2.1. Une première interaction : entre approche mathématique et approche épistémologique.

L'étude de l'articulation des approches mathématique et épistémologique a pour objectifs d'analyser et comparer différentes approches mathématiques de la conjecture, d'identifier les liens entre différentes notions qui sont repérées et de mettre en évidence la place prégnante de la dimension expérimentale[8] dans la recherche mathématique. Pour conduire cette analyse, nous suivons la recherche – en cours actuellement – d'un mathématicien, Michel Mizony, sur la conjecture d'Erdös-Straus[9] en l'analysant mathématiquement et épistémologiquement. Nos interactions avec le mathématicien comportent deux volets : l'analyse des contenus mathématiques de sa recherche et l'analyse de son processus de recherche.

2.1.1. Interactions lors de l'analyse des contenus mathématiques de la recherche.

Le suivi mathématique de la recherche en cours du mathématicien consiste en l'analyse mathématique du contenu de ses résultats : appropriation, réécriture détaillée et articulation avec d'autres résultats (notamment ceux de Mordell, Schinzel et Swett). Cela donne lieu à des entretiens ou des correspondances où nous lui posons des questions mathématiques relatives à ses recherches. Ces interactions nous ont permis de comprendre ses résultats et de les articuler avec les résultats existants de Mordell, Swett et Schinzel. Ainsi nous avons pu établir que ces différents résultats, utilisant des outils et concepts mathématiques différents, étaient équivalents. Par exemple, suite à la remarque d'un collègue, Michel Mizony a montré que l'on peut obtenir son identité [1] à partir de la décomposition obtenue avec un théorème de Mordell[10] : $\frac{4}{n} = \frac{1}{BCD} + \frac{1}{ABDn} + \frac{1}{ACDn}$. Pour cela, posons $m = ABD$ et $d = B^2D$ qui divise m^2 dans l'équation ci-dessus. Exprimons A et D en fonction de m, d, B et C : $\frac{4}{n} = \frac{B}{Cd} + \frac{B}{Cmn}$ qui se réduit à $\frac{Cd}{B} = \frac{mn+d}{4m-1}$. Or B divise $d = B^2D$, donc $(mn + d)/(4m - 1)$ est un entier. Par suite, on obtient l'identité [1]. Nous nous sommes ensuite posé la question de la réciproque afin d'obtenir une équivalence entre ces deux résultats. Nous avons ainsi montré que l'identité [1] de Michel Mizony était équivalente à la décomposition [2] de Mordell en montrant qu'il existe trois entiers A, B et D tels que $d = B^2D$ et $m = ABD$ et en posant $C = (An + B) / (4m - 1)$.

Nos interactions avec le mathématicien nous ont également permis de produire nous-mêmes un résultat partiel sur cette conjecture. Nous avons ainsi établi une identité du

8 La définition que nous utilisons pour la dimension expérimentale est la suivante : « c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets ». (Durand-Guerrier 2006, p.17)

9 Présentée au paragraphe précédent. Pour en savoir plus, consulter le site Internet de Michel Mizony http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/ ou (Gardes et Mizony 2011).

10 Pour n premier, si $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$, alors il existe 4 entiers A, B, C et D, avec A, B et C premiers entre eux deux à deux tels que $x = BCD$, $y = ABD$ et $z = ACD$.

même type que celle de Michel Mizony, mais dans le cas où n est de la forme $4k + 1$ avec k entier :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{(4a-1)c}{(k+a)(k+a+c(4k+1))} + \frac{4a-1}{(4k+1)(k+a+c(4k+1))},$$

où a et c sont des entiers. On obtient une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires si c divise $(k + a)^2$ et $pgcd(k + a\ , c)\times(4a - 1)$ divise $k + a + c(4k + 1)$. Cette identité complète le résultat de Michel Mizony car elle permet d'écrire de nouvelles formules polynomiales.

2.1.2. Interactions lors de l'analyse du processus de recherche.

Le suivi épistémologique de la recherche en cours du mathématicien consiste en l'étude de son processus de recherche. Lors d'entretiens, nous lui posons des questions sur les pistes de recherche suivies, celles abandonnées, sur l'utilisation de l'ordinateur et des concepts, sur les liens entre ses différentes approches, comme l'illustre l'extrait suivant :

> MLG : Et euh, enfin, j'ai pris deux trois notes. Est- ce que, euh, au départ, vous avez cherché déjà à vous séparer du modulo 840 parce qu'il n'y avait pas de…
> MM : Parce que pour moi ça me choquait,
> MLG : Oui c'est ça
> MM : Ce n'était pas naturel
> MLG : Oui voilà, c'était pas naturel
> MM : Pour moi il y avait le modulo 24 […]
> MLG : D'accord, donc en fait c'est ce que j'avais écrit, que, donc euh, il y avait cette première partie modulo 24, après la réduction modulo 12 […]
> MM : Oui ça a été une astuce pour moi pour synthétiser […]
> MLG : Et il y a eu un moment donné quand même le rôle des pythago, enfin des nombres de la forme 4m - 1
> MM : Oui
> MLG : Enfin ça a joué à un moment donné
> MM : Ah ça a joué un rôle énorme
> MLG : Oui et à ce moment-là, c'est là où vous avez donné un résultat pour les nombres de la forme 4m - 1 et vous avez remarqué que x n'était plus une partie entière mais que c'était un multiple de n et après on peut dire que c'est à partir de, et du résultat intermédiaire où vous avez voulu enlever la partie entière
> MM : Hum hum
> MLG : Que finalement avec des tas d'algorithmes derrrière, cette formule est
> MM : Est apparue

Ces interactions nous ont permis de mettre en évidence la richesse du problème sur les concepts et notions utilisées (nombres premiers, nombres pythagoriciens, diviseurs, congruences…) d'une part, et la richesse de la recherche de ce problème pour mettre en œuvre une dimension expérimentale (essais pour différentes valeurs de n, utilisation d'algorithmes…) d'autre part. Elles nous ont permis également de repérer et identifier des gestes mathématiques invariants lors de la recherche (présentés au paragraphe 2.3).

Ces interactions chercheur en didactique/mathématicien nous ont également permis d'affiner et de compléter les critères pour le choix d'un problème mathématique répondant à notre question didactique, à savoir, comment mettre l'élève en position de chercher. Ainsi, aux critères qui caractérisent les problèmes ouverts– énoncé court n'induisant ni la méthode, ni la solution et se trouvant dans un domaine conceptuel familier des élèves (Arsac et Mante 2007), nous ajoutons l'importance de l'aspect expérimental, déjà soulignée dans un autre cadre (la géométrie dans l'espace) par Dias et Durand-Guerrier (2005).

2.2. Une deuxième interaction : entre approche épistémologique et approche didactique

Cette étude, à l'interface des approches épistémologique et didactique, a pour objectif de nous appuyer sur les résultats de l'étude épistémologique : gestes mathématiques invariants identifiés[11] et importance de la démarche expérimentale, pour conduire notre étude didactique, visant à mettre l'élève en position de chercheur. Nos entretiens avec le mathématicien sur son processus de recherche ainsi que quelques expérimentations avec des élèves nous ont alors permis, d'une part de déterminer quatre gestes qui sont potentiellement des gestes invariants dans la recherche mathématique et d'autre part de repérer la mise en œuvre d'une dimension expérimentale dans la recherche mathématique.

2.2.1. Gestes invariants de la recherche mathématique.

En analysant la recherche du mathématicien, nous avons identifié quatre gestes mathématiques susceptibles d'être invariants au cours de l'activité de recherche mathématique chez un chercheur. Tout d'abord, nous avons repéré la réduction du problème à un problème équivalent. Dans le cas de la conjecture d'Erdös-Straus, il s'agit de la réduction de la recherche de solutions pour tout entier naturel n à tout nombre premier n. C'est la première étape effectuée chez le mathématicien alors que chez les élèves, elle n'apparait que dans certains groupes et après un certain temps de recherche collective sur le problème. Ainsi nous pensons que la réduction d'un problème à un problème équivalent à traiter peut être un invariant dans la recherche mathématique. Le second invariant qui est identifié est le questionnement des exemples. Un chercheur examinera particulièrement un exemple afin d'en tirer des informations, par exemple déterminer s'il peut être un exemple générique ou non. Les élèves se sont rarement autorisés à questionner les exemples comme l'illustre cette réplique : « *avec 2 ?* » […] « *ouais mais après il faut le prouver dans le cas général, tu ne vas pas le faire pour chaque* ». Une des raisons que nous avançons pour l'expliquer est l'utilisation peu présente du raisonnement inductif (preuve par généralisation) dans l'enseignement secondaire. Le troisième geste potentiellement invariant que nous avons repéré est de faire des liens entre différentes notions mathématiques qui peuvent être en jeu dans le problème. Le lien établi par le mathématicien entre la conjecture d'Erdös-Straus et les nombres premiers illustre bien l'importance de ce geste, très souvent absent dans la recherche des élèves. Enfin, la collaboration entre pairs est le quatrième geste invariant que nous avons

11 Présentés au paragraphe 2.3.

identifié. La recherche de Michel Mizony s'est conduite en interactions avec plusieurs chercheurs, notamment pour établir la vérification de la conjecture pour tout *n* inférieur à 10^{17}(Gardes et Mizony 2011). Il précise d'ailleurs que *« le travail en groupe chez le chercheur, disons l'échange d'informations est quelque chose d'important ».* Nous pensons que ce geste pourrait être reproduit, d'une certaine manière au niveau scolaire lors de recherches collectives.

2.2.2. Mise en œuvre d'une dimension expérimentale.

Nous avons caractérisé la dimension expérimentale par des allers-retours entre théorie et expérience et plus précisément par un « va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets » (Durand-Guerrier 2006). En étudiant le processus de recherche du mathématicien, nous nous sommes attachés à repérer ces va-et-vient entre la manipulation d'objets et l'élaboration d'une théorie. Nous avons ainsi pu remarquer que ce sont les allers-retours entre la construction de nombreux algorithmes et la tentative d'élaboration d'une preuve papier-crayon qui l'ont conduit au résultat phare de sa recherche, l'identité [1]. La mise en œuvre d'une dimension expérimentale dans sa recherche lui a permis d'avancer et de produire ce résultat partiel. Nous pouvons avancer cette même conclusion pour la recherche des élèves puisque nous avons observé que le va-et-vient entre théorie (recherche de preuves des conjectures émises) et expérience (essai pour différentes valeurs de *n*, formulation de conjecture) leur a permis d'établir et de démontrer deux résultats intermédiaires : si *n* est pair ou si *n* est multiple de 3, la conjecture est vraie (Gardes, 2010).

Conclusion

Les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien à l'articulation des trois approches mathématique, épistémologique et didactique nous ont permis de déterminer et d'identifier plusieurs éléments afin de construire une situation didactique. Notre travail de recherche se poursuit avec l'ambition d'élaborer une ingénierie didactique qui permettrait à l'élève, sous certains aspects, la reproduction du travail du mathématicien. Actuellement, nous construisons un milieu permettant de mettre en place une activité de recherche mathématique en classe. Dans ce but, nous avons commencé à définir un « contrat de recherche », inséré dans le contrat didactique de la classe, qui comprendrait, entre autre, l'apprentissage et l'usage d'un vocabulaire spécifique à la recherche (conjecture, contre-exemple, validation…) ainsi qu'une représentation particulière de l'activité de recherche mathématique (savoir qu'un problème peut se chercher avec plusieurs méthodes, qu'il peut se chercher plusieurs heures…). Nos recherches se centrent sur la caractérisation de ce contrat de recherche ainsi que sur la construction du milieu. Une nouvelle séance avec des étudiants est prévue afin d'expérimenter notre situation didactique.

Bibliographie

Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom INRP.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et Situation-problème*, IREM de Lyon, université Claude-Bernard, Lyon 1, 117p.

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Dias, T, & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM 60*, pp. 61-78.

Durand-Guerrier, V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique, in L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & Mercier A. (eds), *Actes des journées mathématiques de l'INRP*, 17-23, INRP.

Erdös, P. (1950). On a Diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaries), *Mat. Lapok1*, 192-210.

Gardes, M.-L. (2009). Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème en arithmétique. Mémoire de Master 2 HPDS, Université Lyon 1.

Gardes, ML. (2010). Investigations arithmétiques en terminale: entre essais et conjectures. *Revue Petit x83*, Ed. IREM de Grenoble, 51-78.

Gardes, ML., Mizony, M. (2011). La conjecture d'Erdös-Straus: expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM 85. A paraitre.*

Mizony, M. (2009). Sur la conjecture d'Erdös-Straus : une identité. Disponible sur Internet : <http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/> (consulté le 30 juin 2011).

Mordell, L.J (1969). *Diophantine equation.* London, New York, Academic press 1969, chapter 30.

Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Garden City N.Y : Doubleday.

Schinzel, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx.Comment. Math. 28 : 187-194, 2000.*

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Swett, A. (1999). The Erdös-Strauss Conjecture. Disponible sur Internet : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm (consulté le 30 juin 2011).